代数幾何学シンポジウム記録
1977年度 pp.235-242

Semigroup ring の quotient ring

石田正典

N を rank $r>0$ の free $\mathbb{Z}$-module, M をその dual すなわち $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,\mathbb{Z})$ とする。 k を任意の体とするとき, k 上の affine torus embedding X_π ($\dim X = r$) は, cone $N_{\mathbb{R}}\ (=N\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}) \supset \pi = \mathbb{R}_0 a_1 + \cdots + \mathbb{R}_0 a_n$ ($a_1,\cdots,a_n\in N$) により $X_\pi = \mathrm{Spec}(k[M\cap\check{\pi}])$ と書ける。 但し $\mathbb{R}_0 = \{c\in\mathbb{R}\ ;\ c\geq 0\}$, $M_{\mathbb{R}}\supset\check{\pi} = \{x\ ;\ \langle x,a\rangle\geq 0\quad \forall a\in\pi\}$ である。 X_π には torus $T=\mathrm{Spec}(k[M])\subset X_\pi$ が自然に作用している。 $\Gamma(\pi) = \{\text{faces of } \pi\}$ とおくと次の関係がある。

$$
\begin{array}{ccccc}
\Gamma(\pi) & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{l}\text{homog. quotient}\\ \text{int. domains}\\ \text{of } k[M\cap\check{\pi}]\end{array}\right\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \left\{\begin{array}{l}\text{T-stable irr.}\\ \text{red. closed}\\ \text{subschemes of } X_\pi\end{array}\right\} \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
\sigma & \longmapsto & S_\sigma = k[M\cap\check{\pi}\cap\sigma^{\perp}] & \longrightarrow & \mathrm{Spec}(S_\sigma)
\end{array}
$$

但し $\sigma^{\perp} = \{ x \in M_{\mathbb{R}} \,;\, \langle x , a \rangle = 0 \quad \forall a \in \sigma \}$ である。 又 $\dim \sigma + \dim S_{\sigma} = r \quad (\forall \sigma \in \Gamma(\pi))$ となっている。

〔定義〕 $\Gamma(\pi)$ の部分集合 Σ について

$$\Sigma : \begin{cases} \text{star closed} & \Sigma \ni \sigma,\ \Gamma(\pi) \ni \tau,\ \tau > \sigma \Rightarrow \Sigma \ni \tau \\ \text{star open} & \Sigma \ni \sigma,\ \Gamma(\pi) \ni \tau,\ \sigma > \tau \Rightarrow \Sigma \ni \tau \\ \text{locally star closed} & \Sigma \ni \rho, \sigma,\ \Gamma(\pi) \ni \tau,\ \rho > \tau > \sigma \Rightarrow \Sigma \ni \tau \end{cases}$$

このとき次の関係がある。

$$\begin{array}{ccccc} \left\{ \begin{array}{l} \text{star closed} \\ \text{subset of} \\ \Gamma(\pi) \end{array} \right\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{l} \text{reduced homog.} \\ \text{quotient ring} \\ \text{of } k[M \cap \pi^{\vee}] \end{array} \right\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{l} T\text{-stable} \\ \text{red. closed} \\ \text{subsch. of } X_{\pi} \end{array} \right\} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \Sigma & \longmapsto & S_{\Sigma} = k\Big[\bigcup_{\sigma \in \Sigma} M \cap \pi^{\vee} \cap \sigma^{\perp} \Big] & \longmapsto & \mathrm{Spec}(S_{\Sigma}) \end{array}$$

〔問題〕 S_{Σ} がいつ Cohen-Macaulay あるいは Gorenstein となるか.

star closed subset $\Sigma \subset \Gamma(\pi)$ を fix し $\Sigma = \bigcup \Sigma_i$, $\Sigma_i = \{\sigma \in \Sigma, \dim \sigma = i\}$ とする。

$$K^i = \bigoplus_{\sigma \in \Sigma_i} k[M \cap \check{\pi} \cap \sigma^\perp] \qquad (i = 0, \cdots, r)$$

とおくと K^i は free $\mathbb{Z}$-module M に grade をもつ S_Σ-module である。 coboundary map δ^i を

$$\begin{array}{ccc} \delta^i : K^i & \longrightarrow & K^{i+1} \\ \Psi & & \Psi \\ (f_\sigma)_{\sigma \in \Sigma_i} & \longmapsto & \left(\sum_{\substack{\sigma \in \Sigma_i \\ \tau > \sigma}} [\sigma, \tau] Q^\tau_\sigma (f_\sigma) \right)_{\tau \in \Sigma_{i+1}} \end{array}$$

により定義する。 但し $[\sigma, \tau]$ は各 $\sigma \in \Gamma(\pi)$ に一つづつ orientation を定めたときの結合係数 (± 1 又は 0) で Q^τ_σ は quotient map $k[M \cap \check{\pi} \cap \sigma^\perp] \longrightarrow k[M \cap \check{\pi} \cap \tau^\perp]$ である。

[定理] $K^\bullet = (\cdots \to 0 \to K^0 \xrightarrow{\delta^0} K^1 \to \cdots \xrightarrow{\delta^{r-1}} K^r \to 0 \to \cdots)$ は S_Σ の dualizing complex である。

dualizing complex について くわしくは R. Hartshorne [Residues and Duality] 参照. 少なくとも体上 essentially of finite type の環には存在し, noetherian ring A が Spec A connected で $R^{\cdot}$ が A の dualizing complex とすると.

$$A : \text{C.M.} \iff \exists d,\ H^i(R^{\cdot}) = 0 \quad i \neq d$$

$$A : \text{Gorenstein} \iff \exists d,\ H^i(R^{\cdot}) = 0 \quad i \neq d$$

$$H^d(R^{\cdot}) : \text{rank } 1 \text{ proj. } A\text{-module}$$

$H^i(K^{\cdot})$ が M-graded S_Σ-module であることに注意すると次の系を得る。

[系 1]

$$S_\Sigma : \text{C.M.} \iff \exists d,\ H^i(K^{\cdot}) = 0 \quad i \neq d$$

$$S_\Sigma : \text{Gorenstein} \iff \exists d,\ H^i(K^{\cdot}) = 0 \quad i \neq d$$

$$H^d(K^{\cdot}) \simeq S_\Sigma$$

locally star closed subset $\Gamma(\pi) \supset \Phi = \bigcup_{i=0}^{r} \Phi_i$, $\Phi_i = \{\sigma \in \Phi ; \dim \sigma = i\}$ に対して

$$C^i(\Phi, k) = \bigoplus_{\sigma \in \Phi_i} k[\sigma]$$

とおき

$$\begin{array}{ccc} C^i(\Phi, k) & \xrightarrow{\delta^i} & C^{i+1}(\Phi, k) \\ \Psi & & \Psi \\ [\sigma] & \longmapsto & \sum_{\tau \in \Phi_{i+1}} [\sigma, \tau][\tau] \end{array}$$

で k-linear homomorphism δ^i を定義すると $C^\cdot(\Phi, k)$ は complex となることが証明できる。

$\Sigma \ni \rho$ に対して $\Sigma_\rho = \{\sigma \in \Sigma \,;\, \rho \succ \sigma\}$ とおくと Σ_ρ は $\Gamma(\pi)$ の locally star closed subset である。

さて K^i は M-graded S_Σ-module で $\delta^i : K^i \to K^{i+1}$ は degree 0 の homomorphism であるから各 $m \in M$ に対して complex $K^\cdot$ の m-factor $K^\cdot_m$ を考えることができる。

〔命題〕 $m \notin M \cap \check{\pi}$ 又は $m \in M \cap \check{\pi}$ でかつ $\rho = \pi \cap m^\perp \notin \Sigma$ であれば $K^\cdot_m$ は 0-complex であり $m \in M \cap \check{\pi}$ かつ $\rho = \pi \cap m^\perp \in \Sigma$ であれば $K^\cdot_m$ は $C^\cdot(\Sigma_\rho, k)$ と同型である。

これにより系1の S_Σ : C.M. の条件は、次

のように言いかえられる。

〔系2〕 S_Σ が Cohen-Macaulay であるための必要かつ十分条件は ある整数 d があって $H^i(\Sigma_\rho, k)=0$ がすべての $i\neq d$ 及び $\rho\in\Sigma$ に対して成立することである。

π が non-singular すなわち $k[M\cap\check{\pi}]$ が k 上 r 変数の多項式環のとき、この系2は Gerald A. Reisner の [Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings] の結果と同じである。

Gorenstein性については次のことがいえる。

〔系3〕 ある整数 d があって $\forall\rho\in\Sigma$ に対し

$$\dim_k H^i(\Sigma_\rho, k) = \begin{cases} 1 & i=d \\ 0 & i\neq d \end{cases}$$

であれば S_Σ は Gorenstein である。また Σ のすべての minimal face を含む Σ の元が π だけであるとき逆も成り立つ.

〔例1〕　$\Sigma = \Gamma(\pi)$　とおけば　$S_\Sigma = k[M \cap \pi^\vee]$ であり，系2の条件を満たすことがわかるので，$k[M \cap \pi^\vee]$ の Cohen-Macaulay 性がいえる。これは M. Hochster [1] で最初に証明された事実である。

〔例2〕　$\Sigma = \Gamma(\pi) \setminus \{\{0\}\}$ とおくと系3の条件を満たすことが容易にわかるので S_Σ は Gorenstein となる。$\mathrm{Spec}(S_\Sigma) = X_\pi \setminus T$ であるから，torus embedding から torus を除いたところが Gorenstein であることがわかる。

なお complex $K^\cdot$ はある特殊な場合について中村 [4] で Cohen-Macaulay 性の証明に使われている。

8

文 献

[1] M. Hochster, Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytope. Ann. of Math. 96 (1972), 318-337.

[2] M. Hochster, Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes. Ring Theory II, Lecture Note in Pure and App. Math. 26 (1977), Dekker, 171-223

[3] Gerald A. Reisner, Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings. Advances in Mathematics 21, 30-49 (1976)

[4] I. Nakamura, On moduli of stable quasi abelian varieties. Nagoya Math. J. Vol. 58 (1975), 149-214

[5] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, Toroidal Embeddings. Springer Lecture Note 339 (1973)

[6] R. Hartshorne, Residues and Duality. Springer Lecture Note 20 (1966)

[7] K. Miyake, T. Oda, Torus embeddings and applications. Tata Lecture Note, to appear